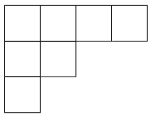
1 Darstellungen von S_d

Wiederholung

Definition 1.1. Eine Partition λ von $d \in \mathbb{N}$ ist ein k-Tupel $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$,$\lambda_i \in \mathbb{N}$ mit:
1.$\lambda_1 + ... + \lambda_k = d$
2.$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_k \geqslant 0$

Definition 1.2. Ein Young-Diagramm ist eine linksbündige Anordnung von Kästchen, die zu einer Partition korrespondiert:
Anzahl der Kaestchen in der i-ten Zeile=λ_i

Beispiel 1.3. $(4, 2, 1) \mapsto$ 

Definition 1.4. Ein Tableau T zu einem Young-Diagramm ist eine Nummerierung der Kästchen mit den Zahlen $1, ..., n$ $T(i, j)$ bezeichne den Eintrag an Position i, j.

Beispiel 1.5.

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad T' = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Wir haben bereits gesehen, dass gilt:
Anzahl der irreduziblen Darstellungen von S_d ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen. Jeder Zykel $\sigma = (a_1...a_k)$ bestimmt eine Konjugationsklasse, da gilt: $g\sigma g^{-1} = (a_\sigma(1)...a_\sigma(k))$.
$\Rightarrow$ Zusammenhang zwischen Partition und irreduzible Darstellung der S_d.

2 Irreduzible Darstellung der S_d

Sei $A = \mathbb{C}[S_d]$ die Gruppenalgebra von S_d über $\mathbb{C}$.
$P := P_{T_\lambda} := \{p \in S_d |\ p \textit{ bewahrt die Zeilen von } T\}$
$Q := Q_{T_\lambda} := \{q \in S_d |\ q \textit{ bewahrt die Spalten von } T\}$
$a := a_{T_\lambda} = \sum_{p \in P} p$
$b := b_{T_\lambda} = \sum_{q \in Q} \operatorname{sgn}(q)\, q$
$c := c_{T_\lambda} = a_{T_\lambda} b_{T_\lambda}$ wird als Young-Symmetrierer bezeichnet.

Beispiel 2.1.

$$\begin{aligned} P_{T'} &= \{(1), (1, 3), (2, 5), (1, 3)(2, 5)\} \\ Q_{T'} &= \{(1), (1, 2), (1, 4), (2, 4), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (3, 5), (3, 5)(1, 2), \\ &\qquad (3, 5)(1, 4), (3, 5)(2, 4), (3, 5)(1, 2, 4), (3, 5)(1, 4, 2)\} \end{aligned}$$

Lemma 2.2. *Für alle $p \in P$ und $q \in Q$ gilt:*

a) $p \cdot a = a \cdot p = a$

b) $(\operatorname{sgn}(q)\, q) \cdot b = b \cdot (\operatorname{sgn}(q)\, q) = b$

c) $p \cdot c \cdot \operatorname{sgn}(q)\, q = c$ *und c ist bis auf Skalarmultiplikation das einzige Element in $\mathbb{C}[S_d]$*

Beweis. Seien $p \in P$ und $q \in Q$

a) $f_p : P \to P,\ g \mapsto p \cdot g$ ist bijektiv, denn seien $g, g' \in P$ und es gilt $f_p(g) = f_p(g')$

$\Rightarrow p \cdot g = p \cdot g' \Rightarrow g = g'$ Also ist f_p injektiv und damit auch surjektiv.

$\Rightarrow p \cdot a = p \cdot \sum\limits_{g \in P} g = \sum\limits_{g \in P} p \cdot g = \sum\limits_{g \in P} g = a$

b)

$f_q : Q \to Q,\ g \mapsto (\operatorname{sgn}(q)\, q) \cdot g$ ist bijektiv, denn seien $g, g' \in Q$ und es gilt $f_q(g) = f_q(g')$

$\Rightarrow (\operatorname{sgn}(q)\, q) \cdot g = (\operatorname{sgn}(q)\, q) \cdot g' \Rightarrow q \cdot g = q \cdot g' \Rightarrow g = g'$

Also ist f_q injektiv und damit auch surjektiv.

$\Rightarrow (\operatorname{sgn}(q)\, q) \cdot b = (\operatorname{sgn}(q)\, q) \cdot \sum\limits_{g \in Q} g = \sum\limits_{g \in Q} (\operatorname{sgn}(q)\, q) \cdot g = \sum\limits_{g \in Q} \operatorname{sgn}(g)\, g = b$

Analog: $a \cdot p = a, b \cdot (\operatorname{sgn}(q)\, q) = b$

c)

$\Rightarrow p \cdot c \cdot (\operatorname{sgn}(q)\, q) = p \cdot a \cdot b \cdot (\operatorname{sgn}(q)\, q) = a \cdot b = c$

Sei $\sum\limits_{g \in S_d} n_g \cdot g \in \mathbb{C}[S_d]$ ein weiteres Element mit dieser Eigenschaft.

Dann ist $n_{pgq} = \operatorname{sgn}(q) \cdot n_g$, also insbesondere $n_{pq} = \operatorname{sgn}(q) \cdot n_1$.

Also ist nur noch zu zeigen, dass für $g \notin P_T \cdot Q_T$

der Koeffizient $n_g = 0$ ist. Wir benutzen nun ein Lemma.

Lemma 2.3. $\forall g \in S_d : g \notin P_T Q_T \;\Rightarrow \exists \alpha\beta \in \{1, ..., d\} : \alpha$ *und* β *sind in der gleichen Zeile von T und der gleichen Spalte von $T' = gT$.*

Angenommen wir finden eine Transposition $t := (\alpha, \beta) \in S_d$, sodass $t \in P_T$ und $t \in Q_g T$.

$\Rightarrow \exists q \in Q_T : t = gqg^{-1}$ Dann ist $tg = qg \Rightarrow tgq^{-1} = g$

und $n_g = \operatorname{sgn}(q^{-1})\, n_{tgq^{-1}} = -n_g$, also $n_g = 0$.

□

Beispiel 2.4. Sei $g = (135)$,$h = (132)(45) \Rightarrow ghg^{-1} = (14)(235)$

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad T' = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad hT = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad ghg^{-1}T' = \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Auf der Menge der Partitionen führen wir folgende (lexikographische) partielle Ordnung ein. Es sei $\lambda > \mu$, falls für den kleinsten Index l mit $\lambda_l - \mu_l \neq 0$ gilt $\lambda_l > \mu_l$.

Lemma 2.5. *Ist $\lambda > \mu$ und T_λ bzw. T_μ Tableaus zu λ und μ, so ist für alle $x \in \mathbb{C}[S_d]$ das Produkt $a_{T_\lambda} \cdot x \cdot b_{T_\mu} = 0$. Insbesondere ist unter der Vorraussetzung $c_{T_\lambda} \cdot c_{T_\mu} = 0$*

Beweis. Es gibt zwei verschiedene Zahlen α und β in derselben Zeile von T_λ und in der selben Spalte von T_μ.

Setze $t := (\alpha\beta) \in S_d \Rightarrow t \in P_{T_\lambda}, t \in Q_{T_\mu}$
$\Rightarrow a_{T_\lambda} b_{T_\mu} = (a_{T_\lambda} t)(t b_{T_\mu}) = a_{T_\lambda}(-b_{T_\mu}) = -a_{T_\lambda} b_{T_\mu}$
$\Rightarrow a_{T_\lambda} b_{T_\mu} = 0$
Aus dem Beweis von Lemma 2.2 folgt: $\forall q \in S_d$:
$b_{gT_\mu} = \sum\limits_{q \in Q_{gT_\mu}} \operatorname{sgn}(q)\, q = \sum\limits_{q \in Q_{T_\mu}} \operatorname{sgn}(q)\, gqg^{-1} = g \left(\sum\limits_{q \in Q_{T_\mu}} \operatorname{sgn}(q)\, q \right) g^{-1}$
$= g b_{T_\mu} g^{-1}$
$\Rightarrow a_{T_\lambda} g b_{T_\mu} g^{-1} = a_{T_\lambda} b_{gT_\mu} = 0 \ \forall g \in S_d$
$\Rightarrow$ Für $x = \sum\limits_{g \in S_d} n_g g \in A$ mit $n_g \in \mathbb{C}$ gilt:
$a_{T_\lambda} n_g g b_{T_\mu} g^{-1} g = (a_{T_\lambda} g b_{T_\mu} g^{-1})(n_g g) = 0$
$\Rightarrow a_{T_\lambda} x b_{T_\mu} = a_{T_\lambda} \left(\sum\limits_{g \in S_d} n_g g \right) b_{T_\mu} = \sum\limits_{g \in S_d} a_{T_\lambda} n_g g b_{T_\mu} = 0$
$\Rightarrow c_{T_\lambda} c_{T_\mu} = a_{T_\lambda}(b_{T_\lambda} a_{T_\mu}) b_{T_\mu} = 0$

□

Lemma 2.6. *(1)Ac_T ist eine irreduzible Darstellung von S_d*
(2)Wenn $\lambda \neq \mu$, dann sind Ac_{T_λ} und Ac_{T_μ} nicht isomorph.

Beweis. (1) Setze für $I_1, I_2 \subseteq A$: $I_1 I_2 := \{a \cdot b | a \in I_1, b \in I_2\}$.
Sei $x \in c_T A c_T \Rightarrow \exists y \in A$: $x = c_T y c_T$
Aus Lemma 2.2 $\Rightarrow \forall p \in P_T, \forall q \in Q_T$:
$pxq = pc_T y c_T q = (pa_T) b_T y a_T (b_T q) = a_T b_T y a_T (\operatorname{sgn}(q)\, b_T) = \operatorname{sgn}(q)\, c_T y c_T$
$= \operatorname{sgn}(q)\, x$
Aus Lemma 2.2 $\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{C}$: $x = \gamma c_T$
$\Rightarrow c_T A c_T \subseteq \mathbb{C} c_T$ Sei $I \subseteq Ac_T$ Unterdarstellung. $\Rightarrow c_T I \subseteq c_T A c_T \subseteq \mathbb{C} c_T$
Da $\mathbb{C} c_T$ eindimensional ist, gibt es nur zwei Fälle:
(a) $I = Ac_T$
(b) $I = \{0\}$
(2)OBdA sei $\lambda > \mu$.
Aus Lemma 2.5 $\Rightarrow c_{T_\lambda} A c_{T_\lambda} = \mathbb{C} c_{T_\lambda}, c_{T_\lambda} A c_{T_\mu} = a_{T_\lambda} b_{T_\lambda} A a_{T_\mu} b_{T_\mu} = 0$
$\Rightarrow Ac_{T_\lambda} \ncong Ac_{T_\mu}$ □

Lemma 2.7. *Für jedes λ ,$c_{T_\lambda} \cdot c_{T_\lambda} = n_\lambda c_{T_\lambda}$ gilt $n_\lambda = \frac{d!}{\dim Ac_{T_\lambda}}$.*

Beweis. Zum Beweis davon betrachten wir die Abbildung $F : x \mapsto x c_T$ als Endomorphismus von $\mathbb{C}[S_s]$. Auf Ac_T ist dies Multiplikation mit n_λ per Definition, auf $\operatorname{Ker} c_T$ ist es die Nullabbildung. Also ist $n_\lambda \cdot \dim Ac_T = Spur(F) = |S_d| \cdot$(Koeff.von [id] in c_T)$= |S_d|$

□

3 Beweis der Frobenius Formel

Wiederholung: 1.C_i mit $i = (i_1, ..., i_d)$ und $\sum \alpha i_\alpha = d$ bezeichnet eine Konjugationsklasse
2.$\Delta x = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$ und $P_j(x) = x_1^j + ... + x_k^j$

Theorem 3.1. *Frobenius Formel: Gegeben sei eine Partition*
$\lambda : \lambda_1 \geqslant ... \geqslant \lambda_k \geqslant 0$ *von* d *setze* $l_1 = \lambda_1 + k - 1, ..., l_k = \lambda_k$

$$\chi_\lambda(C_i) = [\Delta x \cdot \prod_j P_j(x)^{i_j}]_l := \omega_\lambda,\ l = (\lambda_1 + k - 1, \lambda_2 + k - 2, ..., \lambda_k)$$

Beweis. Vorbereitung: Für jede Partition λ von d, haben wir eine Untergruppe, oft auch Young Untergruppe genannt,

$$S_\lambda = S_{\lambda_1} \times ... \times S_{\lambda_k} \hookrightarrow S_d$$

Sei U_λ die Darstellung von S_d, welche von der trivialen Darstellung aus S_λ induziert wird. Also ist $U_\lambda = Aa_\lambda$.

Sei außerdem $\psi_\lambda = \chi_{U_\lambda}$ =Charakter von U_λ.

Die Abbildung $x \mapsto xb_T$ induziert eine Abbildung $U_\lambda = \mathbb{C}[S_d]a_T \to Ac_T = \mathbb{C}[S_d]a_Tb_T$, welche offenbar surjektiv ist.

Der Beweisplan besteht also darin, die Beziehung zwischen U_λ und Ac_λ, also zwischen ψ_λ und dem Charakter χ_λ von Ac_λ zu betrachten.

Wir beweisen den in 3 Schritten.

1. Schritt: Wir berechnen nun zunächst den Charakter ψ_λ der Darstellung U_λ:

Für $i = (i_1, ..., i_d)$ ein d-Tupel von nicht-negativen Zahlen mit $\sum \alpha i_\alpha = d$ bezeichnen wir $C_i \subseteq S_d$ als die Konjugationsklasse bestehend aus Elementen, welche aus i_1 1-Zykel,i_2 2-Zykel,...,i_d d-Zykel gebildet werden.

$\Rightarrow |C_i| = \frac{d!}{1^{i_1}i_1!\cdot 2^{i_2}i_2!\cdot ... \cdot d^{i_d}i_d!}$
Wir zerlegen nun $C_i \cap P_{T_\lambda}$ in P_{T_λ}-Konjugationsklassen $D_1, ..., D_S$.

Für den Charakter von der Darstellung U_λ, die von der trivialen Darstellung induziert ist, gilt (für $g \in C_i$ fixiert)

$$\psi_\lambda(C_i) = \sum_{g\sigma=\sigma} 1,$$

wobei σ die Nebenklassen S_d/S_λ durchläuft.

Wir schreiben dies um zu:
$\psi_\lambda(C_i) = \frac{1}{|S_\lambda|}\frac{1}{|C_i|} \sum\limits_{g\in C_i, s\in S_d, gs\in sS_\lambda} 1 = \frac{1}{|S_\lambda|}\frac{1}{|C_i|} \sum\limits_{s\in S_d, g\in C_i, S^{-1}gs\in S_\lambda} 1 = \frac{1}{|S_\lambda|}\frac{1}{|C_i|} \sum\limits_{s\in S_d, g\in C_i\cap S_\lambda} 1 =$
$\frac{|S_d|}{|S_\lambda|} \cdot \frac{|C_i\cap S_\lambda|}{|C_i|} = \frac{1^{i_1}i_1!\cdot 2^{i_2}i_2!\cdot ... \cdot d^{i_d}i_d!}{d!} \cdot \frac{d!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot ... \cdot \lambda_k!} \cdot \sum\limits_{s_{p,q}} \prod\limits_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{s_{p,1}}s_{p,1}!\cdot ... \cdot d^{s_{p,d}}s_{p,d}!},$

mit

$$i_q = \sum_{p=1}^{k} s_{p,q} \text{ und } \lambda_p = \sum_{q=1}^{d} q \cdot s_{p,q}$$

d.h. $1^{s_{p,1}} \cdot 2^{s_{p,2}} \cdot ...$ ist eine Partition von λ_p für alle p und die Teile dieser Partition summieren sich zu Partition $i = 1^{i_1}2^{i_1}3^{i_3}...$ auf.

$\Rightarrow \psi(C_i) = \sum\limits_{s_{p,q}} \prod\limits_{q=1}^{d} \frac{r_p!}{s_{1,q}!s_{2,q}!\cdot ... \cdot s_{k,q}!}$

Dieser Term ist genau der Koeffizient von $x^{\lambda_1} \cdot ... \cdot x^{\lambda_k}$ im Polynom

$$P = (X_1 + ... + X_k)^{i_1} \cdot (X_1^2 + ... + X_k^2)^{i_2} \cdot ... \cdot (X_1^d + ... + X_k^d)^{i_d}$$

Also gilt $\psi_\lambda(C_i) = [P]_\lambda$.

2. Schritt: Vergleichen wir also nun diese Koeffizienten $[P]_\lambda$ mit den Koeffizienten $\omega_\lambda(i)$. Es gilt per Definition für jedes symmetrische P die allgemeine Formel

$$[P]_\lambda = \sum_\lambda K_{\mu\lambda}[\Delta x \cdot P]_{\mu_1+k-1,\mu_2+k-2,\ldots,\mu_k},$$

wobei die Koeffizienten $K_{\mu\lambda}$ Kostka Zahlen genannt werden. Für jede Partitionen λ und μ von d ist die Zahl $K_{\mu\lambda}$ die Anzahl von Kombinationen mit denen man die Kästchen des Young-Diagramms füllen kann, sodass zeilenweise sich die Zahlen nicht verringern und spaltenweise sich die Zahlen immer vergrößern.

Beispiel 3.2. Sei $\lambda = (3, 2)$ und $\mu = (1, 1, 2, 1)$,

dann gibt es drei mögliche Tableau:

1. $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \cline{1-2}\end{array}$ 2. $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & \\ \cline{1-2}\end{array}$ 3. $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 3 & \\ \cline{1-2}\end{array}$

Also ist $K_{\mu\lambda} = 3$.

Es gilt $K_{\lambda\lambda} = 1$, und $K_{\mu\lambda} = 0$ für $\mu < \lambda$.

$$\Rightarrow \psi_\lambda(C_i) = \sum_\mu K_{\mu\lambda}\omega_\mu(i) = \omega_\lambda(i) + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}\omega_\mu(i) \ (*)$$

3. Schritt: Sei $\chi_\lambda = \chi_{V_\lambda}$ der Charakter von V_λ.

Wir zeigen nun, dass für jede Konjugationsklasse C_i von S_d gilt:

$$\chi_\lambda(C_i) = \omega_\lambda(i)$$

.

Wir schreiben den Charakter ψ_λ von U_λ als Summe mit χ_μ als Basis von H von Klassenfunktionen.

$$\psi_\lambda = \sum_\mu n_{\lambda\mu}\chi_\mu$$

mit $n_{\lambda\lambda} \geqslant 1$ und alle $n_{\lambda\mu} \geqslant 0$

Induktiv können wir nun ω_λ als Summe von Charakteren

$$\omega_\lambda = \sum_\mu m_{\lambda\mu}\chi_\mu$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $m_{\lambda\mu}$ schreiben. Wir benutzen nun ein weiteres Lemma:

Lemma 3.3. $(w_\lambda)_\lambda$ *ist eine Orthonormalbasis von H von Klassenfunktionen.*

Wir wissen also, dass die ω_λ wie auch die χ_λ eine Orthonormalbasis des Vektorraums H bilden. Also ist

$$1 = \langle\omega_\lambda, \omega_\lambda\rangle = \sum_\mu m_{\lambda\mu}^2$$

und damit ist $\omega = \pm\chi$ für ein irreduziblen Charakter χ.

Wir zeigen die Frobeniusformel nun durch absteigende Induktion bzgl. der Ordnung $\geqslant$, also das gilt $\omega_\lambda = \chi_\lambda$ für alle Partitionen λ.

Induktionsanfang: Ist $\lambda = (d)$ die größte Partition der Länge d, so gilt nach $(*)$ die Gleichheit

$$\omega_\lambda = \psi_\lambda = \sum_\mu n_{\lambda\mu}\chi_\mu$$

und aufgrund von $n_{\lambda\lambda} = 1, n_{\lambda\mu} = 0$ sonst, folgt $\omega_\lambda = \chi_\lambda$.

Induktionsvoraussetzung und -schritt:

Ist per Induktion $\chi_\mu = \omega_\mu$ für alle $\mu > \lambda$, so ist

$$\omega_\lambda + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}\chi_\mu = \psi_\lambda = \sum_\mu n_{\lambda\mu}\chi_\mu$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der χ_μ folgt hieraus wieder $\omega_\lambda = \chi_\lambda$, wie es zu zeigen war.

$\square$