Sitzung 5: Schurs Lemma

2.1. Schurs Lemma

Seien $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ und $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ zwei irreduzible Darstellungen von G und sei f eine lineare Abbildung von V_1 nach V_2, so dass $\rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s$ für alle $s \in G$. Dann:

(1) Falls ρ^1 und ρ^2 nicht isomoprh sind, gilt $f = 0$

(2) Falls $V_1 = V_2$ und $\rho^1 = \rho^2$, ist f ein skalares Vielfaches der Identität.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho^1_s"'] & V_2 \arrow[d, "\rho^2_s"] \\ V_1 \arrow[r, "f"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Sitzung 5: Schurs Lemma

2.2. Korollar

Sei h eine lineare Abbildung von V_1 nach V_2 und wir definieren

$$h^0 := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1.$$

Dann gilt:

(1) Falls ρ^1 und ρ^2 nicht isomoprh sind, gilt $h^0 = 0$

(2) Falls $V_1 = V_2$ und $\rho^1 = \rho^2$, f ist ein skalares Vielfaches der Identitt mit Vielfachheit $(1/n) Tr(h)$, mit $dim(V_1) = n$.

2.3. Korollar

Im Fall (1) gilt:

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) = 0$$

für beliebige i_1, i_2, j_1, j_2

Im Fall (2) gilt gleichermaßen $h^0 = \lambda$, also $h^0_{i_2 i_1} = \lambda\delta_{i_2 i_1}$ mit $\lambda = (1/n)Tr(h)$. Daraus folgt $\lambda = (1/n)\sum \delta_{j_2 j_1} h_{j_2 j_1}$. Mit $(*)$ gilt daher:

$$\frac{1}{g}\sum_{t, j_1, j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) h_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j_1, j_2} \delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1} h_{j_2 j_1}$$

2.4. Korollar

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) =$$

$$\frac{1}{n}\sum \delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1} = \begin{cases} 1/n, & \text{wenn } i_1 = i_2 \text{ und } j_1 = j_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sitzung 5: Schurs Lemma

Vorbemerkungen zu 3.

Seien Φ und Ψ Funktionen auf G (also $f : G \to \mathbb{C}$), dann sei

$$(**)\langle \Phi, \Psi \rangle := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \Phi(t^{-1})\Psi(t) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \Phi(t)\Psi(t^{-1}).$$

Dann gilt $\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Psi, \Phi \rangle$. Außerdem ist $\langle \Phi, \Psi \rangle$ linear in Φ und in Ψ. Damit folgt aus der Anwendung der Korollare 1.3 und 1.4:

$$\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0 \text{ und } \langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1}$$

Sitzung 5: Schurs Lemma

Vorbemerkungen zu 3.

Nun nehmen wir an, dass die Matrizen $(r_{ij}(t))$ unitär sind. Dies kann, wie bereits gezeigt, durch eine geeignete Basiswahl erreicht werden. In diesem Fall gilt $r_{ij}(t^{-1}) = \overline{r_{ji}(t)}$. Die Korollare 2.3 und 2.4 führen damit zu 'orthogonalen Relationen' für ein Skalarprodukt $(\Phi|\Psi)$, welche im folgenden Kapitel definiert werden:

Sitzung 5: Orthogonale Relationen für Charaktere

Vorbereitung

Seien Φ und Ψ zwei komplexwertige Funktionen auf G. Nun sei:

$$(\Phi|\Psi) := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \Phi(t)\overline{\Psi(t)}$$

Dies ist eine hermitesche Form (linear in Φ, semilinear in Ψ und $(\Phi|\Psi) > 0$ für alle $\Phi > 0$). Nun übertragen wir diese Struktur auf die Formel $(**)$ mit $\tilde{\Psi}(t) := \overline{\Psi(t^{-1})}$. Daraus ergibt sich:

$$(\Phi|\Psi) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \Phi(t)\overline{\Psi(t)} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \Phi(t)\tilde{\Psi}(t^{-1}) = \langle \Phi, \tilde{\Psi} \rangle$$

Sei nun χ der Charakter einer Darstellung von G, dann gilt (nach Eigenschaften von Charakteren) $\tilde{\chi} = \chi$, so dass $(\Phi|\chi) = \langle \Phi, \chi \rangle$ für alle Funktionen Φ auf G. Also können wir $(\Phi|\chi)$ und $\langle \Phi, \chi \rangle$ synonym verwenden, solange wir es mit Charakteren zu tun haben.

Sitzung 5: Orthogonale Relationen für Charaktere

3.1. Theorem

(1) Sei χ der Charakter einer irreduziblen Darstellung, dann gilt $(\chi|\chi) = 1$, man sagt "χ hat die Norm 1".

(2) Seien χ und χ' die Charaktere zweier nichtisomorpher Darstellungen, dann gilt $(\chi|\chi') = 0$, man sagt "χ und χ' sind orthogonal".

3.2. Beispiel

Wir betrachten nun noch mal die Charaktertafel von S_4:

	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
ord	1	6	8	6	3
ρ^1	1	1	1	1	1
ρ^4	3	-1	0	1	-1

Es handelt sich hierbei um zwei irreduzible Darstellungen von S_4.
Wir zeigen nun $(\chi_{\rho_4}|\chi_{\rho_4}) = 1$ und $(\chi_{\rho_4}|\chi_{\rho_1}) = 0$.

3.2. Beispiel

Wir betrachten nun noch mal die Charaktertafel von S_4:

	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
ord	1	6	8	6	3
ρ^1	1	1	1	1	1
ρ^4	3	-1	0	1	-1

$$(\chi_{\rho_4}|\chi_{\rho_4}) = \frac{1}{24}(\chi_{\rho_4}(id)\chi_{\rho_4}(id^{-1}) \; + \; 6(\chi_{\rho_4}((12))\chi_{\rho_4}((12)^{-1}))) +$$

$$8(\chi_{\rho_4}((123))\chi_{\rho_4}((123)^{-1}) \; + \; 6(\chi_{\rho_4}((1234))\chi_{\rho_4}((1234)^{-1}) +$$
$$3(\chi_{\rho_4}((12)(34))\chi_{\rho_4}(((12)(34))^{-1}) =$$

Sitzung 5: Orthogonale Relationen für Charaktere

3.3. Korollar

Sei V eine lineare Darstellung von G, mit Charakter Φ und V zerfalle in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen:
$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.
Sei zustzlich W eine irreduzible Darstellung mit Charakter χ, dann gilt: die Anzahl der W_i isomorph zu W, ist gleich dem Skalarprodukt $(\Phi|\chi) = \langle \Phi, \chi \rangle$.
Beweis: Sei χ_i der Charakter von W_i. Nach 1.2. (Wiederholung) gilt:

$$\phi = \chi_1 + \cdots + \chi_k.$$

Aus der Linearität des Skalarprodukts folgt nun $(\Phi|\chi) = (\chi_1|\chi) + \cdots (\chi_k|\chi)$. Wir wenden Theorem 2.1. an, wonach $(\chi_i|\chi)$ gleich 1 ist, falls W_i isomorph zu W ist bzw. gleich 0 ist, falls W_i nicht isomorph zu W ist. Daraus folgt die Behauptung direkt. $\square$

3.4. Korollar

Die Anzahl der W_i isomorph zu W hängt nicht von der gewählten Zerlegung als direkte Summe ab.

Beweis: Offensichtlich hängt $(\Phi|\chi)$ nicht von der Wahl der Zerlegung ab. $\square$

3.5. Korollar

Zwei Darstellungen mit dem gleichen Charakter sind isomorph zueinander.

Beweis: Gegeben seien zwei Darstellungen V und V' mit Charakter ϕ bzw. ϕ', wobei $\phi = \phi'$. Für jede beliebge irreduzible Darstellung W mit Charakter χ gilt nun, dass sowohl V als auch V' diese gleich oft (nämlich $(\Phi|\chi) = (\Phi'|\chi)$-mal) enthält. $\square$

Sitzung 5: Orthogonale Relationen für Charaktere

3.6. Korollar

Seien also $\chi_1, \cdots \chi_h$ die paarweise verschiedenen irreduziblen Charaktere von G. Und seien $W_1 \cdots W_k$ die zugehörigen Darstellungen. Jede Darstellung V ist isomorph zu einer direkten Summe

$$V = m_1 W_1 \oplus \cdots \oplus m_k W_k, \quad \text{wobei } m_i \in \mathbb{Z}$$

Der Charakter Φ von V ist gleich $m_1\chi_1 + \cdots + m_h\chi_h$, und es gilt $m_i = (\Phi|\chi_i)$. Durch die orthogonalen Relationen der χ_i folgt:

$$(\Phi|\Phi) = \sum_{i=1}^{h} m_i^2,$$

woraus folgt:

3.6. Korollar

Sei Φ der Charakter einer Darstellung V und $(\Phi|\Phi)$ sei eine ganze Zahl. Es gilt $(\Phi|\Phi) = 1$ genau dann, wenn V ist irreduzibel.

Beweis: $\sum_{i=1}^{h} m_i^2$ ist tatschlich nur dann gleich 1, falls genau eines der m_i gleich 1 ist und die anderen gleich 0. Das ist genau dann der Fall, wenn V isomorph zu einem der W_i ist. $\square$

Sitzung 5: Orthogonale Relationen für Charaktere

Vorbereitung Korollar 2.3.

Nun wandeln wir das Korollar wie folgt um: wir nehmen an, dass ρ^1 und ρ^2 in Matrixform gegeben sind:

$$\rho_t^1 = (r_{i_1 j_1}(t)), \rho_t^2 = (r_{i_2 j_2}(t)).$$

Die lineare Abbildung h wird durch die Matrix $(h_{j_2 j_1})$ und h^0 durch $(h^0_{i_2 i_1})$ definiert. Denn aus der Definition von h^0 folgt:

$$(*) h_{i_2 i_1} = \frac{1}{g} \sum_{t, j_1, j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) h_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t)$$