Lösung zur Übung des Vortrags "Definitionen"

Gegeben: · V ist reguläre Darstellung von G (d.h. $\rho_s(e_t)=e_{st}$)

· $W=\{\lambda\sum_{s\in G} e_s \mid \lambda\in\mathbb{C}\}$ ist Unterdarstellung von V

Übung: Konstruiere $W^\circ=\{\sum_{s\in G}\lambda_s e_s \mid \sum_{s\in G}\lambda_s=0\}$ mithilfe des Beweises von Satz 5 als Anleitung.

Lösung:

→ 1.) Wähle bel. Komplement W' zu W in V:

$W' := \{\sum_{\substack{s\in G\\ s\neq 1}}\lambda_s e_s\}$

offenbar ist $\dim W' = \overbrace{\dim V}^{=|G|} - 1$ und $W'\cap W=\{0\}$.

→ 2.) Bestimme zugehörige Proj. $p: V\to W$ zu W':

Sei $v\in V$. $v=\sum_{s\in G}\lambda_s e_s = \underbrace{\lambda_1 e_1}_{\notin W} + \sum_{\substack{s\in G\\ s\neq 1}}\lambda_s e_s$

$$= \lambda_1 e_1 + \sum_{\substack{s\in G\\ s\neq 1}}\lambda_s e_s + \lambda_1\sum_{\substack{s\in G\\ s\neq 1}} e_s - \lambda_1\sum_{\substack{s\neq 1\\ s\in G}} e_s$$

$$= \underbrace{\lambda_1\sum_{s\in G} e_s}_{\in W} + \underbrace{\sum_{\substack{s\in G\\ s\neq 1}}(\lambda_s-\lambda_1)e_s}_{\in W'}$$

$\Rightarrow p(v)=p(\sum_{s\in G}\lambda_s e_s) := \lambda_1\sum_{s\in G} e_s$

→ 3.) Bilde Durchschnitt d. Konjugierten und ermittle den Kern: Sei $|G|=g$.

$$p^\circ(v)=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\rho_t\circ p\circ\rho_t^{-1}\Big(\sum_{s\in G}\lambda_s e_s\Big)$$

$$=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\rho_t\circ p\Big(\sum_{s\in G}\lambda_s e_{t^{-1}s}\Big)$$ ist 1 für $s=t$.

$$=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\rho_t\Big(\lambda_t\sum_{s\in G} e_s\Big)$$

$$=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\lambda_t\sum_{s\in G} e_{ts} = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\lambda_t\sum_{u\in G} e_u$$

$\Rightarrow p^\circ(v)=0$ g.d.w. $\sum_{t\in G}\lambda_t=0$. Somit $\ker(p^\circ)=W^\circ=\{\sum_{s\in G}\lambda_s e_s \mid \sum_{s\in G}\lambda_s=0\}$