Lösungen zu "Charakter: Grundlegende Definitionen"

Übung:
Seien χ, χ' die Charaktere von zwei linearen Darstellungen der Gruppe G. Beweise die folgenden Formeln: $(\chi+\chi')^2_\sigma = \chi^2_\sigma + \chi'^2_\sigma + \chi\chi'$ und $(\chi+\chi')^2_\alpha = \chi^2_\alpha + \chi'^2_\alpha + \chi\chi'$

Lösung:
Für alle $s \in G$ gilt (wenn man den dritten Satz aus dem Vortrag benutzt):
$(\chi+\chi')^2_\sigma(s) = \frac{1}{2}((\chi+\chi')(s)^2 + (\chi+\chi')(s^2)) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 + 2(\chi\chi')(s) + \chi'(s)^2 + \chi(s^2) + \chi'(s^2)) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 + \chi(s^2)) + \frac{1}{2}(\chi'(s)^2 + \chi'(s^2)) + \frac{1}{2}\cdot 2(\chi\chi')(s) = \chi^2_\sigma(s) + \chi'^2_\sigma(s) + (\chi\chi')(s)$

$(\chi+\chi')^2_\alpha(s) = \frac{1}{2}((\chi+\chi')(s)^2 - (\chi+\chi')(s^2)) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 + 2(\chi\chi')(s) + \chi'(s)^2 - \chi(s^2) - \chi'(s^2)) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 - \chi(s^2)) + \frac{1}{2}(\chi'(s)^2 - \chi'(s^2)) + \frac{1}{2}\cdot 2(\chi\chi')(s) = \chi^2_\alpha(s) + \chi'^2_\alpha(s) + (\chi\chi')(s)$

Übung:
(a) Bestimme den Charakter χ_e der Permutationsdarstellung, die die Wirkung von S_4 auf die Eckpunkte des Würfels betrachtet.
(b) Bestimme den Charakter χ_k der Permutationsdarstellung, die die Wirkung von S_4 auf die Kanten des Würfels betrachtet.
(c) Zeige, dass χ_f auch der Charakter der Darstellung $\rho^1 \oplus \rho^4 \oplus \rho^5$ ist.

Lösung:
(a) χ_e gibt die Anzahl der Eckpunkte an, die unter einer Bewegung des Würfels invariant bleiben, also erhalten wir:
$\chi_e((1)) = 8$, $\chi_e((12)) = 0$, $\chi_e((123)) = 2$, $\chi_e((1234)) = 0$, $\chi_e((12)(34)) = 0$

(b) χ_k gibt die Anzahl der Kanten an, die unter einer Bewegung des Würfels invariant werden, also erhalten wir:
$\chi_k((1)) = 12$, $\chi_k((12)) = 2$, $\chi_k((123)) = 0$, $\chi_k((1234)) = 0$, $\chi_k((12)(34)) = 0$

(c) Nach den zweiten Satz aus dem Vortrag gilt:
$\chi_{\rho^1\oplus\rho^4\oplus\rho^5}((1)) = \chi_{\rho^1}((1)) + \chi_{\rho^4}((1)) + \chi_{\rho^5}((1)) = 1+3+2 = 6$
$\chi_{\rho^1\oplus\rho^4\oplus\rho^5}((12)) = \chi_{\rho^1}((12)) + \chi_{\rho^4}((12)) + \chi_{\rho^5}((12)) = 1+(-1)+0 = 0$
$\chi_{\rho^1\oplus\rho^4\oplus\rho^5}((123)) = \chi_{\rho^1}((123)) + \chi_{\rho^4}((123)) + \chi_{\rho^5}((123)) = 1+0+(-1) = 0$
$\chi_{\rho^1\oplus\rho^4\oplus\rho^5}((1234)) = \chi_{\rho^1}((1234)) + \chi_{\rho^4}((1234)) + \chi_{\rho^5}((1234)) = 1+1+0 = 2$
$\chi_{\rho^1\oplus\rho^4\oplus\rho^5}((12)(34)) = \chi_{\rho^1}((12)(34)) + \chi_{\rho^4}((12)(34)) + \chi_{\rho^5}((12)(34)) = 1+(-1)+2 = 2$
Dies entspricht dem zuvor berechneten Charakter χ_f.